

離散数学

第8回 振り返り問題

学籍番号:

氏名:

問 1. p, q, r を命題とする.

1. $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

2. $(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

を示せ (分配則) .

証明の方針

左辺 = 右辺 とは, 左辺 \iff 右辺 が真であり, 両辺の真偽値がケースごとに一致していることである. この事実が成り立つかを真理値表で確認すればよい.

証明

1. 真理値表を書く.

表 1: 分配則の真理値表 (1)

p	q	r	左辺		右辺		
			$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$(p \wedge r)$	$(q \wedge r)$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

両辺の真偽値は等しいので, $(p \vee q) \wedge r \iff (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ が真となる。

よって $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

2. 真理値表を書く.

表 2: 分配則の真理値表 (2)

p	q	r	左辺		右辺		
			$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$(p \vee r)$	$(q \vee r)$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T	F
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F

両辺の真偽値は等しいので, $(p \wedge q) \vee r \iff (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ が真となる。

よって

$$(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r).$$

Q.E.D.