

# 論理を使ったクイズ

岩本 貢

電気通信大学 情報理工学域 II 類 (融合系)  
セキュリティ情報学プログラム

離散数学

2019/07/26

# 目次

## ① 論理クイズ：解法の方針

## ② クイズ：正直村と嘘つき村

- 問題 2.1：黄金の島
- 問題 2.2：正直村と嘘つき村 (The fork in the road)
- 問題 2.3：黄金の谷

## 解法の方針

- 1 問題文を論理式に翻訳
- 2 論理式を解く
  - ☞ 真理値を求める
  - ☞ 求めたい論理式の導出
- 3 解いて得た論理式を自然言語に戻す
- 4 (必要に応じて) 検算する

## 問題 2.1：黄金の島

ある離れ小島があって、その島は「正直村」と「嘘つき村」に分かれている。正直村の住人の言うことは常に真であり、嘘つき村の住人の言うことは常に偽である。二つの村の住人は島の中を自由に歩き回っており、その姿からは正直村の住人か、嘘つき村の住人かは分からない。

ある人がこの島に黄金を探しにやって来た。そして、最初に出会った島民に、「この島に黄金はありますか？」と尋ねた。島民はこの質問には直接答えず、「この島に黄金があるのは、私が真実を述べるとき、かつそのときに限ります。」と不思議な返事をして、立ち去ってしまった。さて、この島に黄金はあるのだろうか。

## 問題の整理

### 条件

前提 1) 正直村の人ならば，言うことは常に真

前提 2) 嘘つき村の人ならば，言うことは常に偽

発言) この島に黄金があるのは，私が正直村の人であり，  
かつその時に限る

### 命題の定義

- ▶  $p \stackrel{\text{def}}{\iff}$  (目の前の人) 正直村の人である  
(  $\neg p \stackrel{\text{def}}{\iff}$  (目の前の人) うそつき村の人である)
- ▶  $g \stackrel{\text{def}}{\iff}$  この島に黄金がある
- ▶  $S \stackrel{\text{def}}{\iff}$  この人の発言に関する命題

## 1 問題文を論理式に翻訳

### 条件

前提 1) 正直村の人ならば，言うことは常に真

前提 2) 嘘つき村の人ならば，言うことは常に偽

発言) この島に黄金があるのは，私が正直村の人であり，  
かつその時に限る

### 定式化

前提 1)  $p = T \implies \forall S, S = T$

前提 2)  $p = F \implies \forall S, S = F$

発言)  $g = T \iff p = T$  i.e.,  $g \iff p$  (次項で解説)

▶ 知りたいことは，黄金の有無，つまり  $g$  の真偽

## 「かつその時に限る」の解釈

$A$ であるのは、 $B$ であるとき、かつそのときに限る  $\iff (A \iff B)$

この命題は次の2つのANDである：

- 1)  $A$ であるのは、 $B$ であるとき  
 $\iff B$ であるとき、 $A$ である  
 $\iff (B \Rightarrow A)$
- 2)  $A$ であるのは、 $B$ であるときに限る  
 $\iff B$ でないなら、 $A$ でない  
 $\iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$   
 $\iff (A \Rightarrow B)$

1) かつ 2) より、 $A \iff B$

## 2 論理式を解く 3 自然言語に戻す

2  $S \iff (p \iff g)$  とする

前提 1)  $p = T \implies (p \iff g) = T$ . このとき  $g = T$

前提 2)  $p = F \implies (p \iff g) = F$ . このとき  $g = T$

▶ いずれの場合も  $g = T$

3 すなわち、ここは黄金の島である

4 (検算は不要)

## 問題 2.2：正直村と嘘つき村 (The fork in the road)

もう一つ、似たような話。村人は皆、大変ものぐさで、聞かれたことに対して「はい」か「いいえ」かの返事しかしない。しかも、一回の質問にしか答えてくれない。正直村の住人は、聞かれたことが真ならば「はい」という返事をし、偽ならば「いいえ」という返事をする。嘘つき村の住人は聞かれたことが真ならば「いいえ」という返事をし、偽ならば「はい」という返事をする。彼らは論理に大変強く、決して間違えることはない。

さて、ある黄金探しがこの島に来た。彼は自分が今いる場所が正直村か嘘つき村か知りたいと思った。そこへ、ちょうど島の住人が一人やって来た。そこで、ここが正直村か嘘つき村かを尋ねようと思ったが、この人は嘘つき村の住人かも知れないので、普通の質問をしても意味はない。どのような質問をすればよいか。

## 問題の整理

### 条件

前提 1) 正直村の人：

質問の答えが真なら「はい」、偽なら「いいえ」

前提 2) 嘘つき村の人：

質問の答えが真なら「いいえ」、偽なら「はい」

### 命題の定義（追加）

▶  $Q_1 \stackrel{\text{def}}{\iff}$  質問に対する真偽

▶  $A \stackrel{\text{def}}{\iff}$  「はい」と答える

（注意：質問の真偽と一致するとは限らない）

▶  $h \stackrel{\text{def}}{\iff}$  ここは正直村である

## 1 問題文を論理式に翻訳

### 条件

前提 1) 正直村の人：

質問の答えが真なら「はい」、偽なら「いいえ」

前提 2) 嘘つき村の人：

質問の答えが真なら「いいえ」、偽なら「はい」

### 定式化

前提 1)  $p = T \Rightarrow (Q_1 \Leftrightarrow A)$

前提 2)  $p = F \Rightarrow (Q_1 \Leftrightarrow \neg A)$

- ▶ 知りたいこと：ここが正直村か否か、つまり  $h$  の真偽
- ▶ やりたいこと： $Q_1$  をうまく設計する（次項）

## ポイント： $Q_1$ をうまく設計する

### $Q_1$ 設計上のポイント

- 1) この人はどちらの村の人か分からない：  
☞  $A$  の真偽は使えない ( $A$  の真偽はどちらの村かの判断に使う)
- 2) 「はい (いいえ)」と答えたら (この人が誰であっても)  
「ここが正直村 (嘘つき村) である」と理解したい  
☞  $A$  は  $p$  の真偽に依存してはいけない

### ポイントを論理式で表現

- 1)  $Q_1 = Q_1(p, h)$
- 2)  $\forall p \in \{T, F\}, h \iff A$

2 ↓

$$Q_1 \iff (p \iff h)$$

$p$	$h$	$A$	$Q_1$
$T$	$T$	$T$	$T$
$T$	$F$	$F$	$F$
$F$	$T$	$T$	$F$
$F$	$F$	$F$	$T$

### 3 自然言語へ翻訳 4 検算

3  $Q_1 \iff (p \iff h)$

$\iff$   $p$  と  $h$  の真偽は同じですか？

$\iff$  あなたが正直であることと、

ここが正直村であることの真偽は一致しますか？

$\iff$  ここはあなたの村ですか？

4 各自確認せよ．二重否定が使われていることに注意

## 問題 2.3：黄金の谷

数日間の情報収集の後、黄金探しは、この島の「黄金の谷」に黄金があることを聞いた。そこで、その谷を目指して歩き出す。しばらく行くと道が二股に分かれている。地図がないので、どちらへ行ったらよいか分からず困っていると、一人の住民がそこに立っている。道を尋ねようと思ったが、この人は嘘つき村の住人かも知れないので、普通の質問をしても意味はない。さて、黄金の谷へ行く正しい道を知るためには、どのような質問をすればよいか。

## 問題の整理

### 条件

前提 1) 正直村の人：

質問の答えが真なら「はい」、偽なら「いいえ」

前提 2) 嘘つき村の人：

質問の答えが真なら「いいえ」、偽なら「はい」

### 命題の定義（追加）

▶  $Q_2 \stackrel{\text{def}}{\iff}$  質問に対する真偽

▶  $A \stackrel{\text{def}}{\iff}$  「はい」と答える

（注意：質問の真偽と一致するとは限らない）

▶  $g \stackrel{\text{def}}{\iff}$  右に黄金がある

## 実は問題 2.2 と同じ

1, 2 は問題 2.2 と同様

3  $Q_2 \iff (p \iff g)$

$\iff$   $p$  と  $g$  の真偽は同じですか？

$\iff$  あなたが正直であることと、  
右側に黄金があることの真偽は一致しますか？

$\iff$  日本語として不自然？

## 2 自然な日本語にする工夫

### アイデアと解法

▶  $g$  と  $Q_2$  の真偽は  $p = F$  の時だけ異なる

(\*)  $p = F$  のときのみ  $\neg Q_2$  となる質問 ( $Q'_2$ ) が欲しい

☞ そのような  $Q'_2$  があれば,  $Q'_2 \iff g$  としてよい

⇐  $Q_2 \iff$  質問  $Q'_2$  をしたら「はい」と答えますか? と聞く

▶ 質問  $Q_2$  は (\*) を満たす:

☞  $p = T \Rightarrow (Q_2 \iff Q'_2)$

☞  $p = F \Rightarrow (Q_2 \iff \neg Q'_2)$

$p$	$g$	$A$	$Q_2$	$Q'_2$
$T$	$T$	$T$	$T$	$T$
$T$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$T$	$T$	$F$	$T$
$F$	$F$	$F$	$T$	$F$

3 右に黄金があると聞かれたら「はい」と答えますか?

4 各自確認せよ. 二重否定が使われていることに注意