

【問題】

次の論理式のうち，トートロジー（恒真命題）はどれか？

- (1) $\forall xP(x) \Rightarrow \exists xP(x)$
- (2) $\exists xP(x) \Rightarrow \forall xP(x)$
- (3) $\forall x\forall yP(x, y) \Rightarrow \forall y\forall xP(x, y)$
- (4) $\forall x\exists yP(x, y) \Rightarrow \exists y\forall xP(x, y)$
- (5) $\exists y\forall xP(x, y) \Rightarrow \forall x\exists yP(x, y)$
- (6) $\exists y\forall xP(x, y) \Rightarrow \forall y\exists xP(x, y)$
- (7) $\forall xP(x) \Rightarrow P(y)$
- (8) $P(y) \Rightarrow \forall xP(x)$
- (9) $\exists xP(x) \Rightarrow P(y)$
- (10) $P(y) \Rightarrow \exists xP(x)$

【解答】

- (1) トートロジー
- (2) トートロジーではない。

各変数の変域を $\{0, 1\}$ とし，述語 P を $P(x) \Leftrightarrow x = 1$ と定めると， $\exists x(x = 1)$ は T（真）で $\forall x(x = 1)$ は F（偽）となるので (2) は F.

- (3) トートロジー
- (4) トートロジーではない。

各変数の変域を $\{0, 1\}$ とし，2変数述語 P を $P(x, y) \Leftrightarrow x = y$ と定めると， $\forall x\exists y(x = y)$ は T で $\exists y\forall x(x = y)$ は F となるので (4) は F.

- (5) トートロジー

¹mitsugu@uec.ac.jp, 東3号館 924号室

(6) トートロジーではない.

各変数の変域を $\{0,1\}$ とし, 2変数述語 P を $P(x,y) \Leftrightarrow y = 1$ と定めると, $\exists y \forall x (y = 1)$ は T で $\forall y \exists x (y = 1)$ は F となるので (6) は F.

(7) トートロジー

(8) トートロジーではない.

各変数の変域を $\{0,1\}$, 述語 P を $P(x) \Leftrightarrow x = 1$ で定め, さらに自由変数 y の値を $y = 1$ と定めれば, $1 = 1$ は T で $\forall x (x = 1)$ は F となるので (8) は F.

(9) トートロジーではない.

各変数の変域を $\{0,1\}$, 述語 P を $P(x) \Leftrightarrow x = 1$ で定め, さらに自由変数 y の値を $y = 0$ と定めれば, $\exists x (x = 1)$ は T で $0 = 1$ は F となるので (9) は F.

(10) トートロジー