離散数学
第2回 振り返り問題の解答

学籍番号:　　　　　　　　氏名:

問. 任意の集合 X, Y, Z について

$$(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$$

を示せ.

証明

1. 左辺 $\subseteq$ 右辺 を示す.

   $\forall x \in$ 左辺 $= (X \cap Y) \cup Z$ を選ぶと，(a)$x \in (X \cap Y)$ または (b)$x \in Z$ である.

   (a) $x \in (X \cap Y)$ の場合： $x \in X$ かつ $x \in Y$. $x \in X$ から $x \in X \cup Z$，かつ $x \in Y$ から $x \in Y \cup Z$. よって $x \in (X \cup Z) \cap (Y \cup Z) =$ 右辺.

   (b) $x \in Z$ の場合: $Z \subseteq X \cup Z$ より $x \in X \cup Z$, かつ $Z \subseteq Y \cup Z$ より $x \in Y \cup Z$. よって $x \in (X \cup Z) \cap (Y \cup Z) =$ 右辺.

   $\forall x \in$ 左辺 に対して (a) または (b) なので,

   $$\forall x \in \text{左辺} \quad \text{に対して}\ x \in \text{右辺}.$$

   以上より，左辺 $\subseteq$ 右辺 が示せた.

2. 左辺 $\supseteq$ 右辺 を示す.

   $\forall x \in$ 右辺 $= (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$ を選ぶ．次の２つの場合を考える.

   (a) $x \in Z$ の場合：

   (b) $x \notin Z$ の場合：$x \in$ 右辺 の選び方より，$x \in X \cup Z$ かつ $x \in Y \cup Z$.
   $x \notin Z$ と仮定しているので, $x \in X \cup Z$ より $x \in X$ でなければならない．かつ,
   $x \notin Z$ と仮定しているので, $x \in Y \cup Z$ より $x \in Y$ でなければならない.
   よって $x \in X \cap Y$ が示せた.

   $\forall x \in U$ に対して (a) または (b) なので,

   $$\forall x \in \text{右辺} \quad \text{に対して (a) または (b) なので，} \quad x \in Z \cup (X \cap Y) = \text{左辺}.$$

   以上より，左辺 $\supseteq$ 右辺 が示せた.