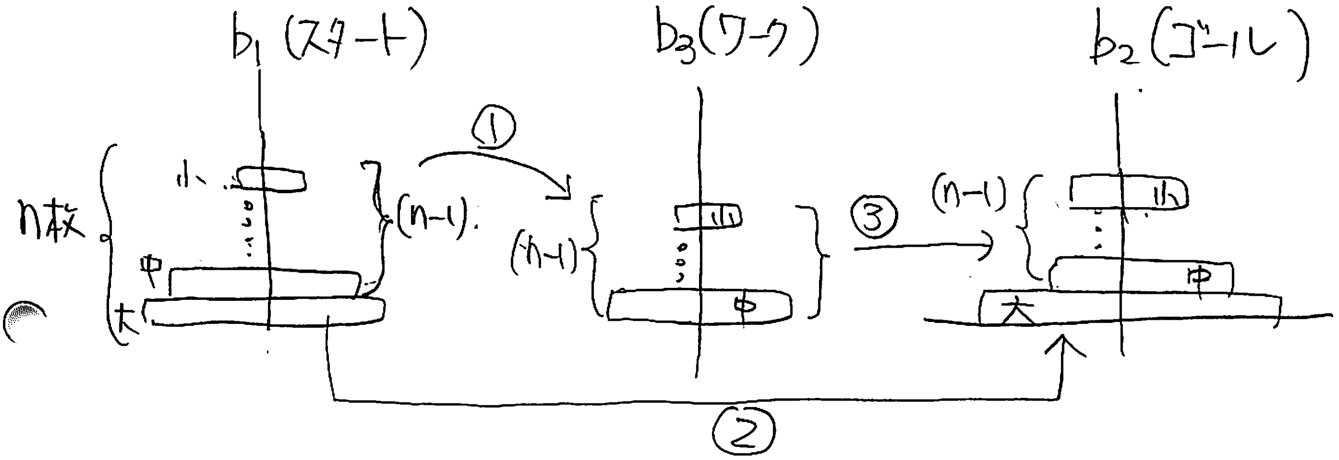
THE UNIVERSITY OF ELECTRO-COMMUNICATIONS

1-5-1, CHOFUGAOKA, CHOFU-SHI, TOKYO

URL http: //www.uec.ac.jp

ふり返り問題(13) ハノイの塔 2013/07/12 太田



$f(n)$: n枚の円盤を移し終えるための操作回数

$$f(n) = f(n-1) + 1 + f(n-1)$$

①の操作回数　②　③の操作回数

(1) $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(n) = 2f(n-1) + 1 & n \geq 2 \end{cases}$

(2) $f(1) = 1$

$f(2) = 2 \times 1 + 1 = 3$

$f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$

$\vdots$

$P(n)$: $f(n) = 2^n - 1$ と予想できる.

THE UNIVERSITY OF ELECTRO-COMMUNICATIONS

1-5-1, CHOFUGAOKA, CHOFU-SHI, TOKYO

URL http: //www.uec.ac.jp

数学的帰納法(タイプ1)による証明

。$P(1)$

$f(1) = 1$

$2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$　　$\therefore f(1) = 2^1 - 1$

。$\forall k \in \mathbb{N}\ [\,P(k) \Rightarrow P(k+1)\,]$

$f(k+1) = 2f(k) + 1$　　$(\because)\ f(n) = 2f(n-1) + 1$

$= 2(2^k - 1) + 1$　　$(\because)\ P(k) = T$

$= 2 \cdot 2^k - 2 + 1$

$= 2^{(k+1)} - 1$　　$\therefore P(k) \Rightarrow P(k+1)$ が成立.

よって

$\forall n \in \mathbb{N}\ \ f(n) = 2^n - 1$

(3) $n=50$ の移動時間の見積り

$1分 = 60秒 \doteqdot 2^6$ sec

$1H = 60分 \doteqdot 2^{12}$ sec

$2^{10} = 1000$

$2^3 = 8$

$1.Y = 365 \times 24 = 8760H = 2^{13}H$

$= 2^{25}$ sec.

$2^{50}\,\text{sec} = 2^{50-25}\,Y = 2^{25}\,Y$

$2^5 = 32$

$2^{20} = 100万年$

$= 3200万年$

正確には

35678347.7年 をこえる。